ΛΥΣΕΙΣ

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2001

Θέμα 1ο

Α. α) Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 188

Α. β) Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 191

Α. γ) Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 194

Β. α)

Για κάθε $x \neq 0$ η υπόθεση $x(f(x) - 2x + 2) = \eta\mu x \Leftrightarrow f(x) - 2x + 2 = \dfrac{\eta\mu x}{x}$

$$f(x) = 2x - 2 + \frac{\eta\mu x}{x}$$

Οπότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(2x - 2 + \dfrac{\eta\mu x}{x}\right) = 0 - 2 + 1 = -1$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_o = 0$, θα ισχύει $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$

Β. β)

Η f είναι συνεχής στο $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ με $f(0) = -1 < 0$ και $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi - 2 + \dfrac{2}{\pi} > 0$

Άρα $f(0)\cdot f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) < 0$, οπότε, με βάση το θεώρημα Bolzano, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ έτσι ώστε $f(\xi) = 0$.

Θέμα 2ο

Α.α)

Γ

Α. β)

$|w| = 2\sqrt{2}$ οπότε οι εικόνες του w βρίσκονται στον κύκλο με κέντρο Ο(0, 0) και ακτίνα $\rho = 2\sqrt{2}$

Β. α)

$$w = \frac{z-3i}{1+i} = \frac{x+yi-3i}{1+i} = \frac{(x+yi-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{x - xi + yi + y - 3i - 3}{2} =$$

$$= \frac{x+y-3}{2} + \frac{-x+y-3}{2}i$$

Άρα $Re(w) = \dfrac{x+y-3}{2}$ και $Im(w) = \dfrac{-x+y-3}{2}$

Β.β)

$$\text{Arg}(w) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{x+y-3}{2} = \frac{-x+y-3}{2} \text{ και } x+y-3>0 \text{ και } -x+y-3>0$$

$$\Leftrightarrow \quad x=0 \quad \text{και} \quad y>3$$

Δηλαδή ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των αριθμών z είναι το τμήμα του φανταστικού άξονα για το οποίο έχουμε $y > 3$

Θέμα 3^o

α)

$A_f = (0, +\infty)$ στο οποίο η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \ln x - 1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$

Πρόσημο της f ΄ και μονοτονία της f

x	0 e $+\infty$
f ΄	$-$ 0 $+$
f	↘ | ↗

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, e]$ και γνησίως αύξουσα στο $[e, +\infty)$.

β)

Από τον παραπάνω πίνακα διαπιστώνουμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x = e, το $f(e) = e - 2e = -e$

Επομένως για κάθε $x > 0$ θα είναι $f(x) \geq f(e) \Leftrightarrow x\ln x - 2x \geq -e$

$$x\ln x \geq 2x - e$$

$$\ln x \geq 2 - \frac{e}{x}$$

γ)

Για κάθε x με $1 \leq x \leq e$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, θα έχουμε $f(1) \geq f(x) \geq f(e) \Leftrightarrow -2 \geq f(x) \geq -e$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με $E = \int_1^e -f(x)dx =$

$$= \int_1^e (2x - x\ln x)dx =$$

$$= 2\int_1^e xdx - \int_1^e x\ln xdx =$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln xdx =$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e - \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e + \frac{1}{2}\int_1^e xdx =$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e - \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e + \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e =$$

$$= \frac{3e^2 - 5}{4} \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

Θέμα 4^o

α)

$$g(x) = \frac{f'(x) + f(x)}{e^x} \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{(f''(x) + f'(x))e^x - e^x(f'(x) + f(x))}{e^{2x}} =$$

$$= \frac{f''(x) - f(x)}{e^x} = 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

αφού $f''(x) = f(x)$

Άρα $g(x) = c$

β)

$(f(x)e^x)' = f'(x)e^x + e^x f(x) = e^x\left(f'(x) + f(x)\right)$ **(1)**

Αλλά $g(x) = \dfrac{f'(x) + f(x)}{e^x} \Leftrightarrow f'(x) + f(x) = e^x g(x)$

Η (1) γίνεται $(f(x)e^x)' = e^{2x}g(x)$

Όμως $g(x) = \dfrac{f'(x) + f(x)}{e^x} = c$ απ' όπου για $x = 0$ προκύπτει $\dfrac{f'(0) + f(0)}{e^0} = c$, και λόγω της υπόθεσης $c = 1$, άρα $g(x) = 1$.

Επομένως $(f(x)e^x)' = e^{2x}$

γ)

$(f(x)e^x)' = e^{2x} \Rightarrow (f(x)e^x)' = \left(\dfrac{1}{2}e^{2x}\right)' \Leftrightarrow f(x)e^x = \dfrac{1}{2}e^{2x} + \theta$ **(2)**

Για $x = 0$ η (2) δίνει $f(0) = \dfrac{1}{2} + \theta \Leftrightarrow 1 = \dfrac{1}{2} + \theta \Leftrightarrow \theta = \dfrac{1}{2}$

Η (2) γίνεται $f(x)e^x = \dfrac{1}{2}e^{2x} + \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$f(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2e^x} = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$